Analiza Funkcjonalna + Topologia
WPPT IVr. semestr letni 2013
WYKŁAD 13: Zastosowania tw. Hahna–Banacha do zbiorów wypukłych

Na tym wykładzie przypomnimy pojęcia zbioru wypukłego, podamy pełną wersję twierdzenia Hahna–Banacha i udowodnimy kilka jego zastosowań typu twierdzeń o rozdzielaniu funkcjonałem. W tym celu musimy wprowadzić kilka nowych pojęć.

Definicja (przypomnienie). *Kombinacją wypukłą* punktów $x_1, \ldots, x_n$ w przestrzeni liniowej X nazywamy każdą ich kombinację liniową o współczynnikach nieujemnych sumujących się do 1. Zbiór $A \subset X$ nazywa się *wypukłym* jeśli jest on zamknięty na branie kombinacji wypukłych.

Definicja. Przestrzeń liniowo-topologiczna nazywa się *lokalnie wypukłą*, jeśli istnieje baza topologii złożona ze zbiorów (otwartych) wypukłych. Wystarczy do tego istnienie bazy otoczeń wypukłych w zerze.

Fakt. Przestrzeń unormowana jest lokalnie wypukła, bo wszystkie kule (wystarczy patrzeć na kule wokół zera) są wypukłe; wynika to natychmiast z jednorodności i podaddytywności normy: norma kombinacji liniowej jest mniejsza równa od kombinacji liniowej norm.

Definicja. *Funkcjonałem podliniowym* na przestrzeni liniowej X nazywiemy każdą funkcję $p : X \to \mathbb{R}$ spełniającą dwa warunki:
1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (podaddytywność)
2. $p(tx) = tp(x)$ dla $t \geq 0$ (dodatnia jednorodność)

(pojęcie to obejmuje zarazem funkcjonały rzeczywiste, jak i normy).

Definicja. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni liniowo-topologicznej, wypukłym i zawierającym otwarte otoczenie zera. *Funkcjonałem Minkowskiego* zbioru A nazywamy funkcję z X w $\mathbb{R}_+$,

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : \tfrac{x}{t} \in A\}.$$

Uwagi: 1. Dla każdego x zbiór $\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\}$ jest (niepustą) półprostą dodatnią (wynika to z wypukłości A oraz tego, że A zawiera zero wraz z otoczeniem). Czyli, $\frac{x}{t} \in A$ dla wszystkich $t > \mu_A(x)$. Mamy $\mu_A(x) < 1 \implies x \in A$ oraz $\mu_A(x) > 1 \implies x \notin A$. Równość $\mu_A(x) = 1$ zachodzi na brzegu zbioru A (te punkty mogą należeć lub nie należeć do A). Jeśli A jest otwarty, to mamy $\mu_A(x) < 1 \iff x \in A$.

2. Funkcjonał Minkowskiego jest nieujemny (oczywiste) i podliniowy. Faktycznie, jeśli $x, y \in X$ i $\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in A$ $(t, s > 0)$, to $\frac{x+y}{t+s} = \frac{t}{t+s}\frac{x}{t} + \frac{s}{t+s}\frac{y}{s} \in A$ (z wypukłości A). To dowodzi podaddytywności. Dodatnia jednorodność wynika wprost z definicji.

3. Jeśli A jest kulą jednostkową w przestrzeni unormowanej, to $\mu_A(\,\cdot\,) = \|\cdot\|$. W innym przypadku μ_A jest ,,czymś w rodzaju normy” dla której A (o ile jest otwarty) jest ,,czymś w rodzaju kuli jednostkowej”.

Twierdzenie Hahna–Banacha (wersja z funkcjonałem podliniowym). Niech V_0 będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej V (nie zakładamy nic więcej) i niech p będzie nieujemnym funkcjonałem podliniowym na V. Niech f będzie funkcjonałem liniowym określonym na V_0, na której spełnia on $f \leq p$. Wtedy istnieje określony na V funkcjonał liniowy F, taki że $F \leq p$ oraz $F|_{V_0} = f$.

Uwaga: Warunek $F \leq p$ implikuje $|F(x)| \leq \max\{p(x), p(-x)\}$. Prawa strona jest też funkcjonałem podliniowym, w dodatku symetrycznym. Jeśli p jest od razu symetryczny (tzn. $p(x) = p(-x)$), to $F \leq p$ jest równoważne z $|F| \leq p$.

Dowód twierdzenia: Jest identyczny jak w poznanej wcześniej wersji dla $p = \|\cdot\|$.

ZASTOSOWANIA

Twierdzenie pierwsze o rozdzielaniu. Niech A i B będą niepustymi rozłącznymi zbiorami wypukłymi w przestrzeni liniowo-topologicznej V, przy czym A jest otwarty. Wtedy istnieje funkcjonał liniowy ciągły F na V oraz stała γ, takie że

$$F(a) < \gamma \leq F(b), \text{ dla dowolnych } a \in A,\ b \in B.$$

Dowód: Niech $C = A - B + x_0$, gdzie $x_0 = b_0 - a_0$, zaś $a_0 \in A$ i $b_0 \in B$ są ustalonymi punktami. Wtedy C jest zbiorem wypukłym, otwartym i zawiera zero (co się sprawdza bardzo łatwo). Zatem funkcjonał Minkowskiego μ_C jest dobrze określonym nieujemnym funkcjonałem podliniowym. Zauważmy, że x_0 nie należy do C (to by oznaczało, że zero należy do $B - A$, co przeczy rozłączności A z B). Zatem $\mu_C(x_0) \geq 1$. Na jednowymiarowej przestrzeni V_0 rozpiętej przez x_0 zdefiniujmy funkcjonał f wzorem $f(tx_0) = t$. Dla punktów tx_0 z t ujemnym f jest ujemne a μ_C dodatnie, więc $f < \mu_C$. Dla $t \geq 0$ mamy, z dodatniej jednorodności μ_C:

$$f(tx_0) = t \leq t\mu_C(x_0) = \mu_C(tx_0).$$

Czyli $f \leq \mu_C$ na V_0 i można stosować twierdzenie H-B. Daje ono funkcjonał liniowy F na V ograniczony przez μ_C. Co to oznacza? Otóż po pierwsze dla $x \in C \cap (-C)$ (a to jest otwarte otoczenie zera) mamy $\mu_C(x) \leq 1$ i $\mu_C(-x) \leq 1$, więc $|F(x)| \leq 1$, co implikuje, że F jest ograniczony, a więc ciągły. Po drugie, mamy dla dowolnych $a \in A,\ b \in B$,

$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \leq \mu_C(a - b + x_0) < 1,$$

gdyż $F(x_0) = f(x_0) = 1$ oraz $a - b + x_0 \in C$. Pokazaliśmy, że $F(a) < F(b)$. Czyli $\sup F(A) \leq \inf F(B)$. Ponadto z Twierdzenia o Odwzorowaniu Otwartym, $F(A)$ jest otwarty, więc nie osiąga swojego supremum. Tak więc za liczbę γ z tezy twierdzenia można przyjąć $\sup F(A)$. $\square$

Twierdzenie drugie o rozdzielaniu. Niech A i B będą niepustymi rozłącznymi zbiorami wypukłymi w przestrzeni liniowo-topologicznej lokalnie wypukłej (na przykład unormowanej) V, przy czym A jest zwarty a B domknięty. Wtedy istnieje funkcjonał liniowy ciągły F na V, taki że $\sup F(A) < \inf F(B)$ (tzn. obrazy $F(A)$ i $F(B)$ leżą w *dodatniej* odległości; w poprzednim twierdzeniu była tylko nieostra nierówność).

Dowód: Dla każdego $a \in A$ istnieje wypukłe otoczenie zera U_a takie, że $U_a + a$ jest rozłączne z B nawet po domknięciu. Wtedy $U_a + a'$ jest rozłączny z B dla a' z pewnego otoczenia punktu a. Otoczenia te tworzą pokrycie zbioru zwartego A, więc można wybrać podpokrycie skończone, a tym samym skończoną kolekcję zbiorów U_a. Ich przekrój (nazwijmy go U) jest otwartym i wypukłym otoczeniem zera, takim że $A + U$ jest rozłączny z B. Teraz stosujemy poprzednie twierdzenie i dostajemy funkcjonał F, taki że $\sup F(A + V) \leq \inf F(B)$. Ale $F(A)$ jest zwarty (jako ciągły obraz zbioru zwartego), więc jego supremum jest ostro mniejsze od supremum zbioru otwartego $F(A + V)$. $\square$

Tomasz Downarowicz